相机模型与投影变换

章国锋
浙江大学CAD&CG国家重点实验室

视频场景重建的流程

运动恢复
结构

深度恢复

三维
重建

齐次坐标

在原有的坐标上增加一个维度：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

新增的维度并不会增加自由度：

$$(x, y, z, w) \quad w \neq 0 \rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

齐次坐标

使用2D坐标完成平移：

$$x' \rightarrow \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + t_u \\ v + t_v \end{bmatrix} = x + t$$

使用齐次坐标完成平移：

$$x' \rightarrow \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_u \\ 0 & 1 & t_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = Tx$$

齐次坐标

使用齐次坐标判断点是否在线上

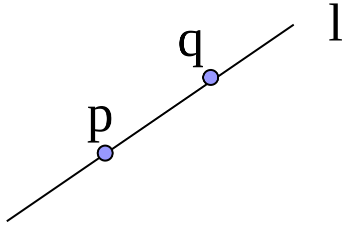
$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad x^T l = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0$$

使用齐次坐标判断点是否在平面上

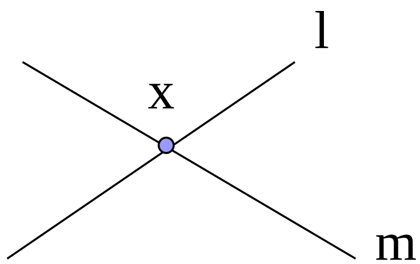
$$\pi = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ d \end{bmatrix} \qquad x^T \pi = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ d \end{bmatrix} = 0$$

齐次坐标

- 使用两个点定义一条线: **l = p × q**



- 使用两条线定义一个点: **x = l ×m**



齐次坐标

使用齐次坐标完成平移和放缩：

$$x' \to \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_u & 0 & s_u t_u \\ 0 & s_v & sv_t v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_u & 0 & 0 \\ 0 & s_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_u \\ 0 & 1 & t_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = STx$$

使用齐次坐标完成旋转和平移：

$$x' \to \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & t_u \\ sin\theta & cos\theta & t_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_u \\ 0 & 1 & t_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = TRx$$

向量叉积的矩阵表示

向量叉积 $v \times x$ 与以下这种矩阵乘法等价

$$v \times x = [v]_{\times} x$$

其中

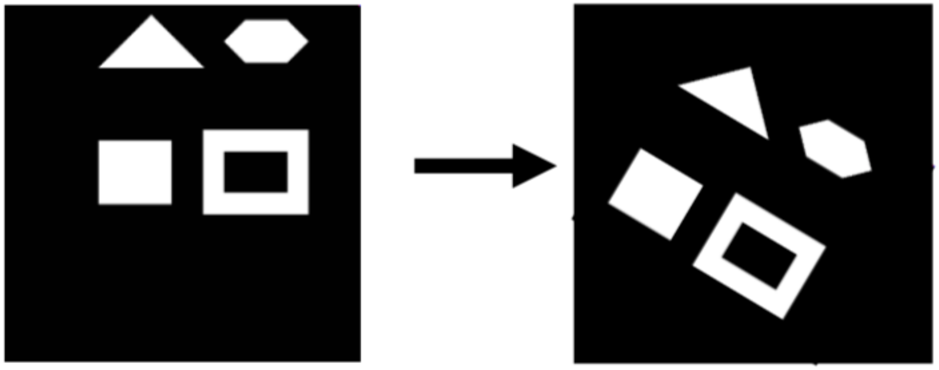
$$[v]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

- $[v]_{\times}$ 是一个秩为2的3x3斜对称矩阵。
- v 是矩阵 $[v]_{\times}$ 的零向量：

$$v \times v = [v]_{\times} v = 0$$

等距变换

2D的等距变换具有三自由度，这种变换是保距离的

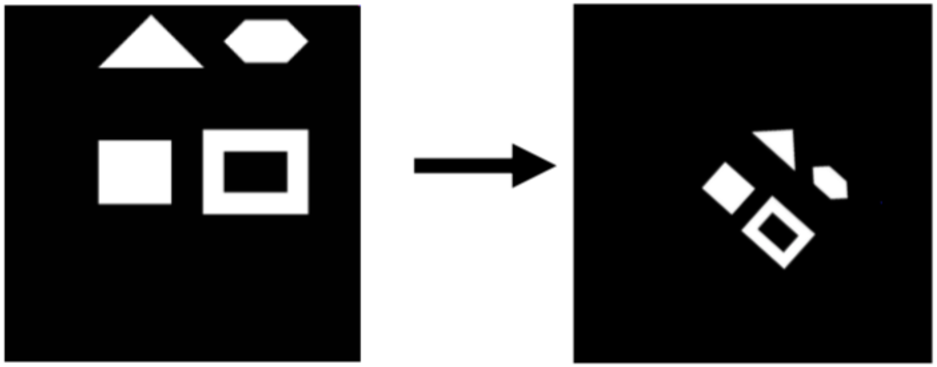


$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

R为旋转矩阵，t为平移向量

相似变换

2D的相似变换具有四自由度，这种变换是保角度的

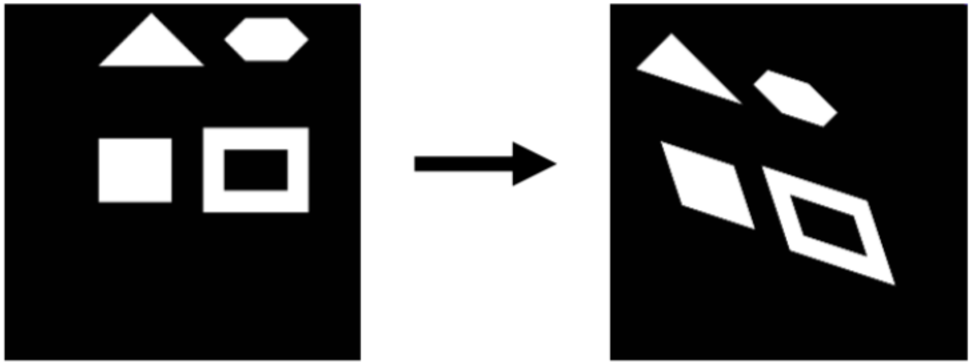


$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

s为相似变换因子

仿射变换

2D的仿射变换具有六自由度，这种变化是保平行的

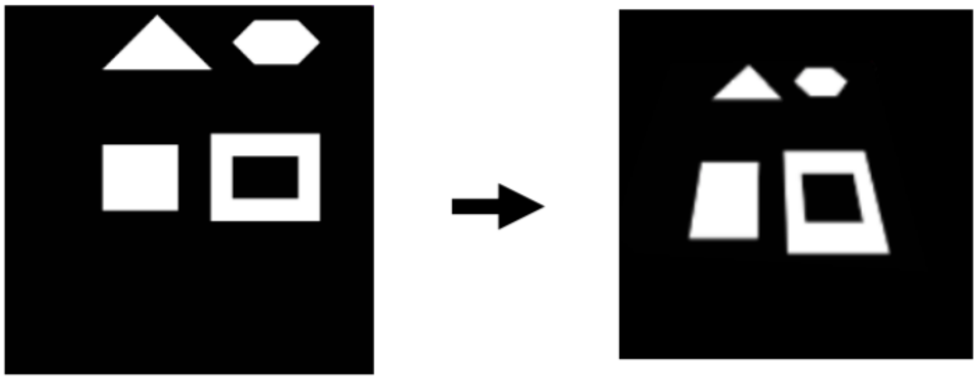


$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = R(\theta)R(-\phi)SR(\phi) \qquad S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

射影变换

2D的射影变换具有八自由度，这种变化是保同线性的



$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix}$$

求解射影变换

$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ v & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{bmatrix} \qquad x' = Hx$$

$$u_2 = \frac{h_1 u + h_2 v + h_3}{h_7 u + h_8 v + h_9}$$

$$v_2 = \frac{h_1 u + h_2 v + h_3}{h_4 u + h_5 v + h_6}$$

展开两个等式中得到：

$$h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 - h_7 u_1 u_2 - h_8 v_1 u_2 - h_9 u_2 = 0$$

$$h_4 u_1 + h_5 u_2 + h_6 - h_7 u_1 v_2 - h_8 v_1 v_2 - h_9 v_2 = 0$$

求解射影变换

$$h_1u_1 + h_2u_2 + h_3 - h_7u_1u_2 - h_8v_1u_2 - h_9u_2 = 0$$
$$h_4u_1 + h_5u_2 + h_6 - h_7u_1v_2 - h_8v_1v_2 - h_9v_2 = 0 \qquad (1)$$

我们使用下述表示

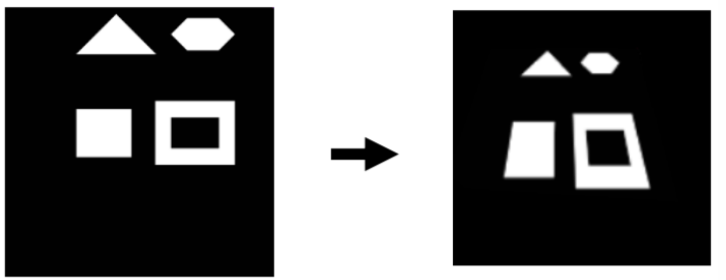
$$A_i = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1u_2 & -v_1u_2 & -u_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 & -u_1v_2 & -v_1v_2 & -v_2 \end{pmatrix}$$

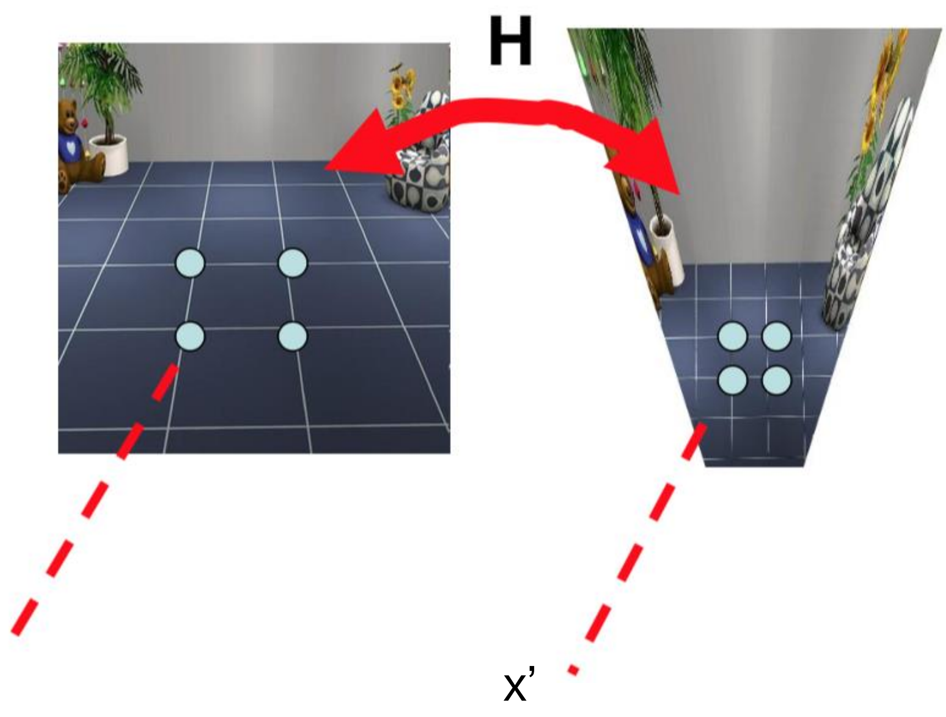
$$\mathbf{h}^{\bullet} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix}$$

则等式(1)可以改写成如下形式：

$$A_i\mathbf{h} = 0$$

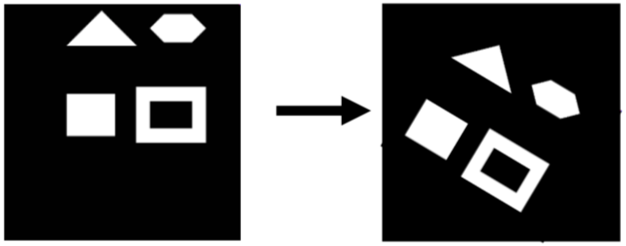
求解射影变换





$A_i\mathbf{h} = 0$

2D齐次坐标的线性变换



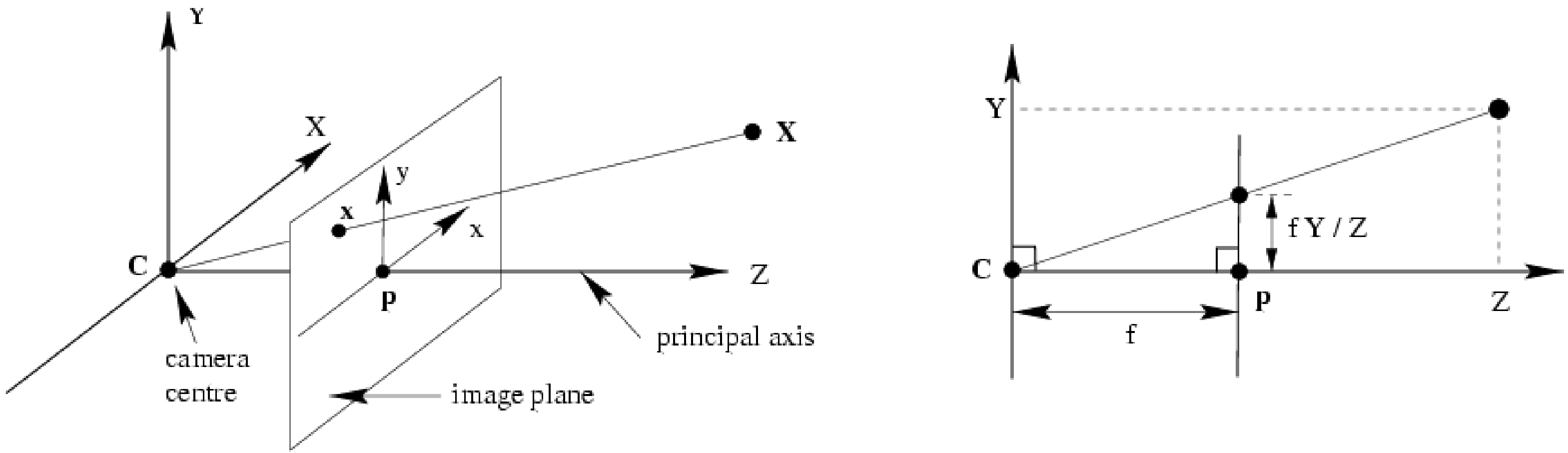
$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & t \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

针孔相机模型



投影方程：

$$x = f\frac{X}{Z}$$

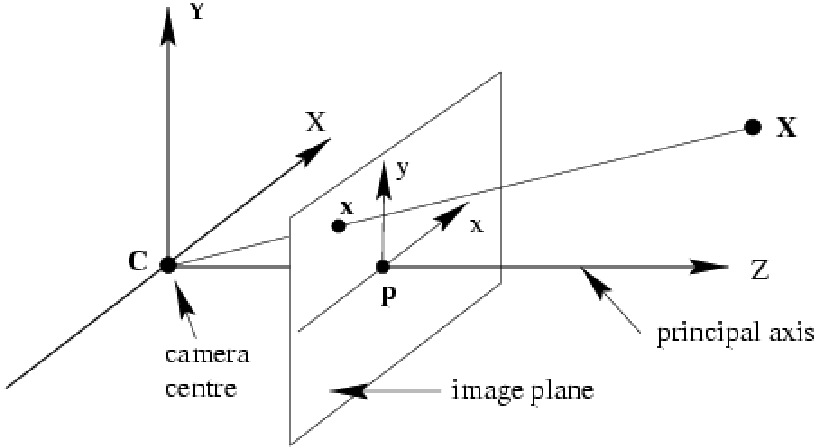
$$y = f\frac{Y}{Z}$$

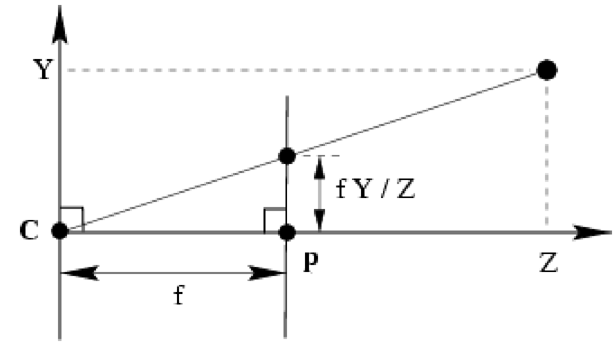
齐次坐标表示：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richard Hartley and Andrew Zisserman."Multiple View Geometry in Computer Vision". Cambridge University Press, Second Edition 2004.

针孔相机模型

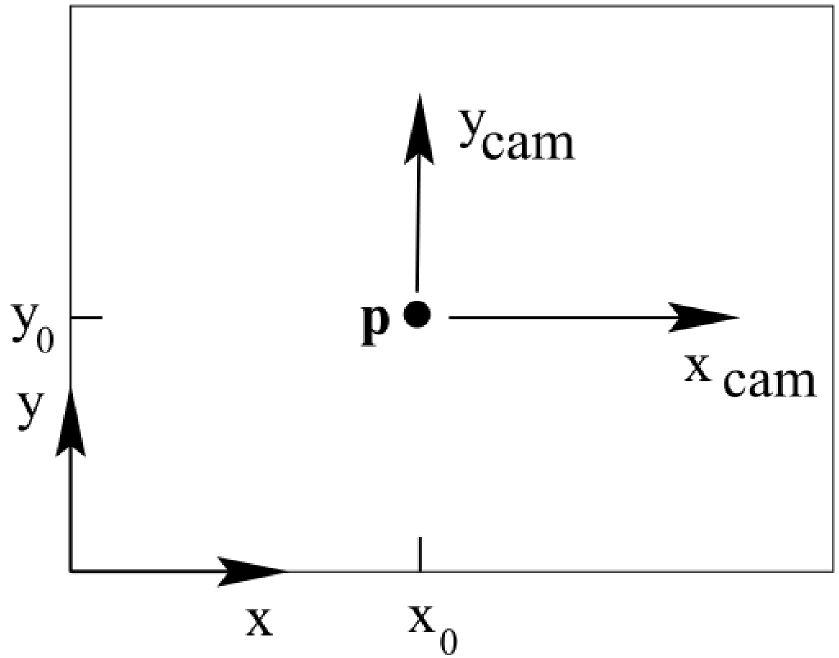




$$\begin{pmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{pmatrix} = \underset{\mathrm{K}}{\begin{bmatrix} f & & \\ & f & \\ & & 1 \end{bmatrix}} \underset{[\mathrm{R}|\mathrm{t}]}{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richard Hartley and Andrew Zisserman.“Multiple View Geometry in Computer Vision”. Cambridge University Press, Second Edition 2004.

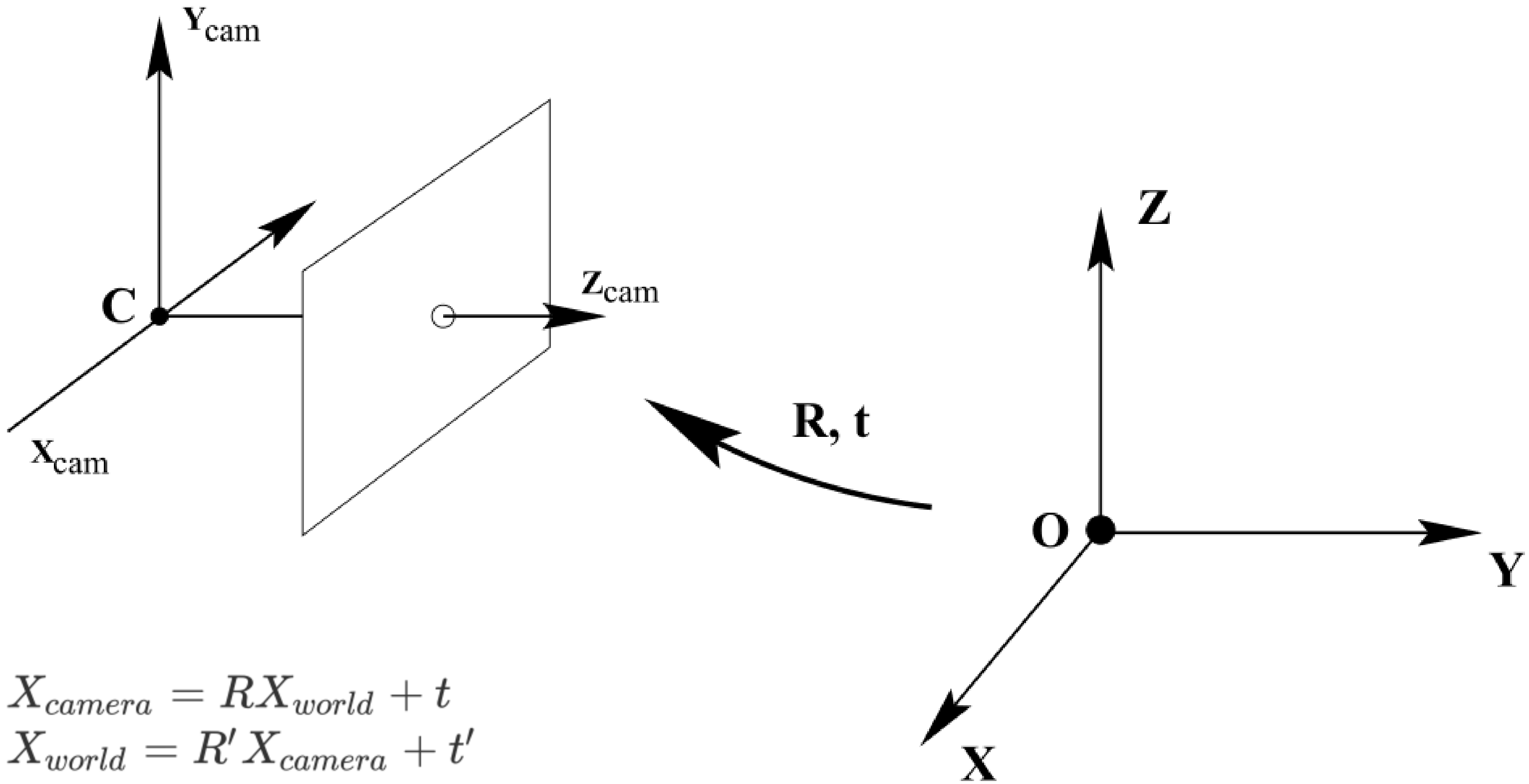
主点的偏移



$$\begin{pmatrix} fX/Z + x_0 \\ fY/Z + y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} fX + Zx_0 \\ fY + Zy_0 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f & & x_0 & 0 \\ & f & y_0 & 0 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richard Hartley and Andrew Zisserman.“Multiple View Geometry in Computer Vision”. Cambridge University Press, Second Edition 2004.

相机的外部参数



$$\begin{cases} X_{camera} = RX_{world} + t \\ X_{world} = R' X_{camera} + t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} R' = R^{-1} \\ t' = -R^{-1} t \end{cases}$$

Richard Hartley and Andrew Zisserman."Multiple View Geometry in Computer Vision". Cambridge University Press, Second Edition 2004.

透视相机模型

$$K = \begin{bmatrix} f_x & s & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{K}\left[\mathrm{R} \mid \mathrm{t}\right]$$

11 DoF (5+3+3)

径向畸变

- 比如鱼眼镜头:

- 数学模型:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} f_x & s & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{R}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^\top & -\mathbf{R}^\top \mathbf{t} \\ 0_3^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

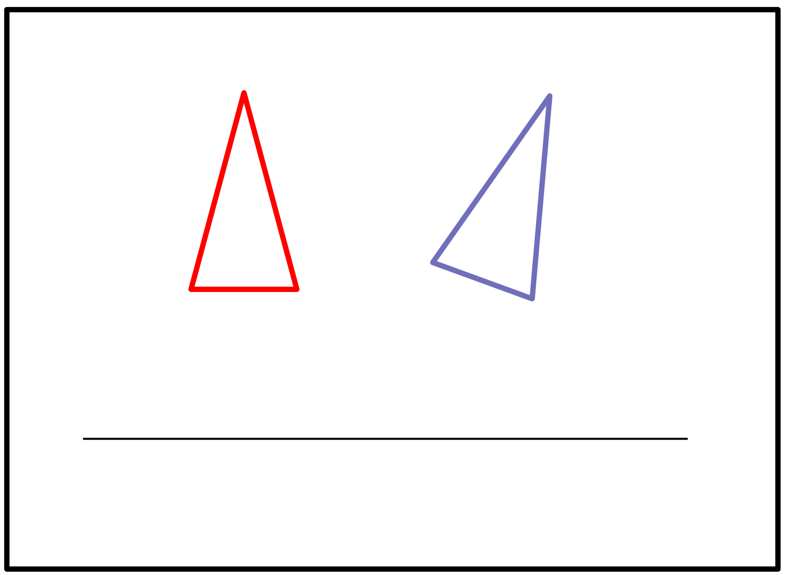
$$\mathrm{R}(x,y) = (1 + K_1(x^2+y^2) + K_2(x^2+y^2)^2 + \ldots) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(Marc Pollefeys)

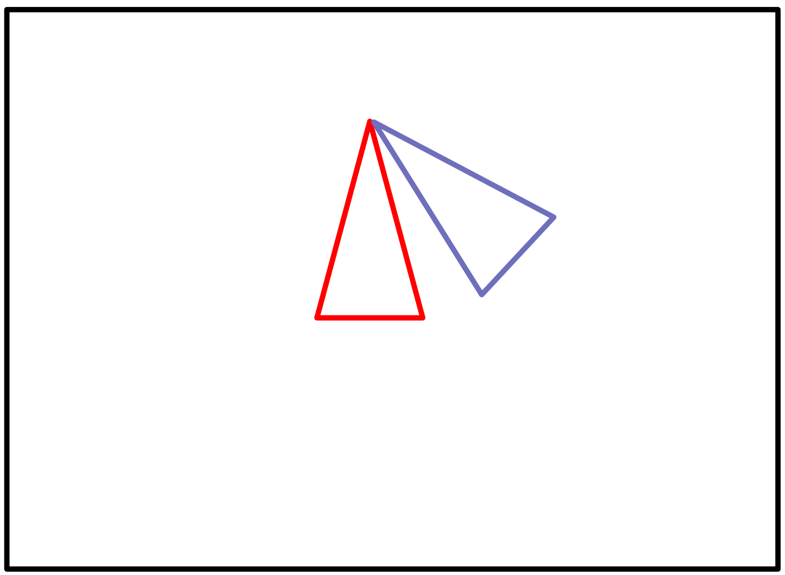
径向畸变矫正例子

(Marc Pollefeys)

单应性矩阵



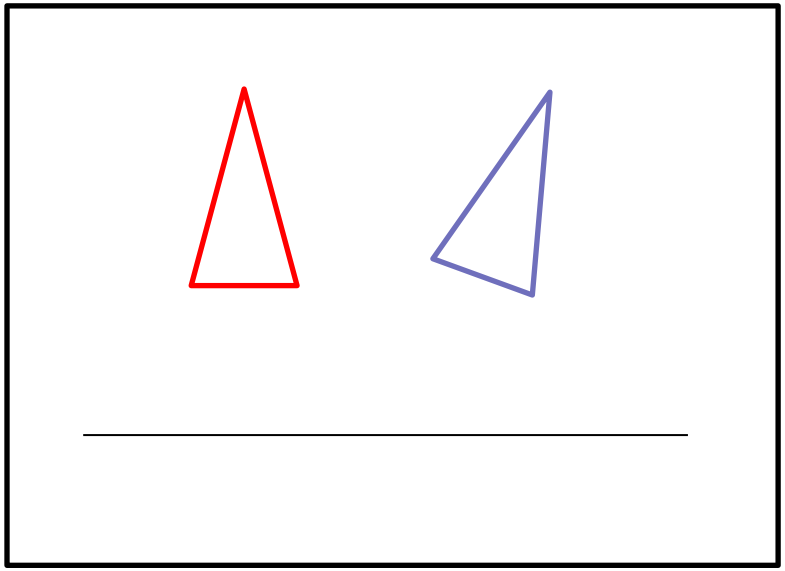
拍摄平面



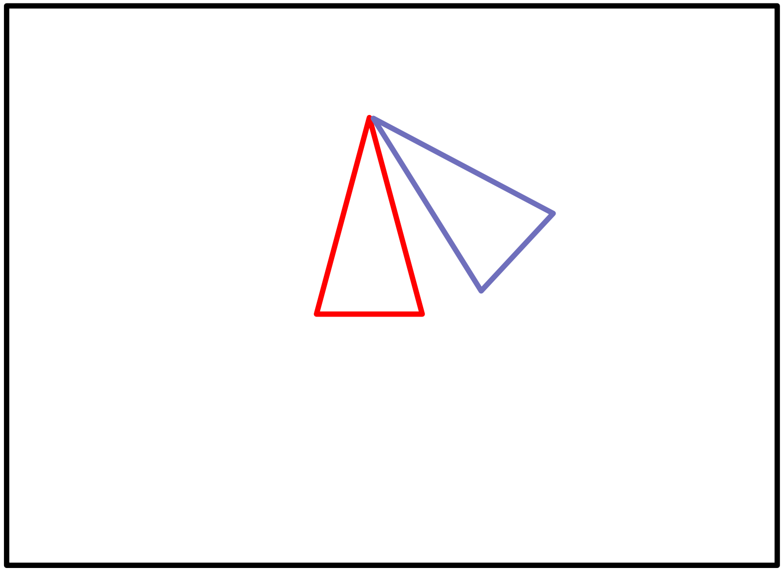
纯旋转

$$c\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

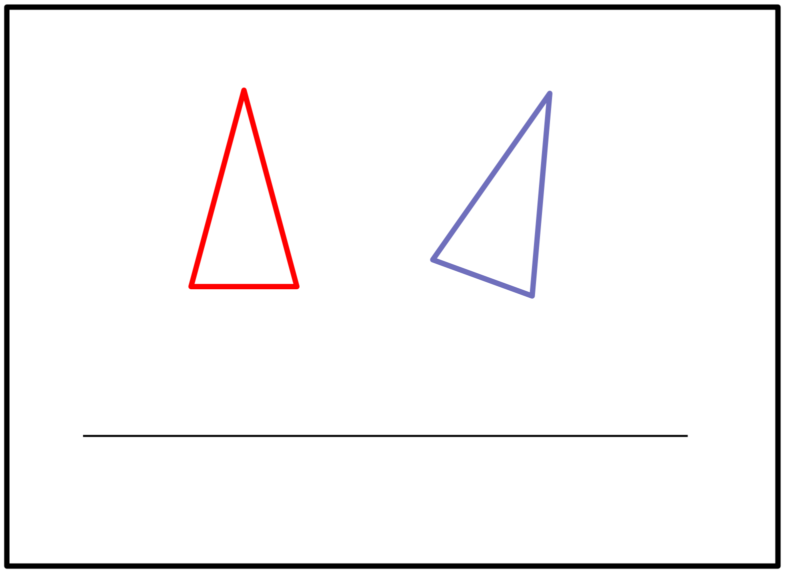
单应性矩阵



单应性矩阵



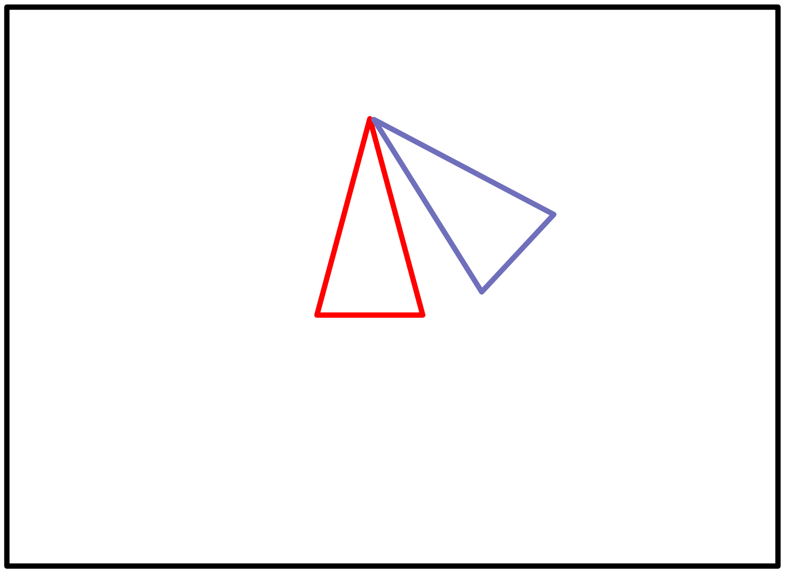
单应性矩阵



拍摄平面

$$\pi = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ d \end{bmatrix}$$

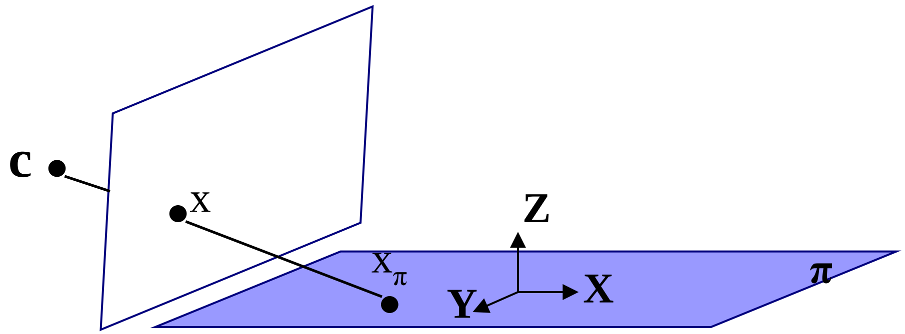
$$H = K_2(R - \frac{tn}{d})K_1^{-1}$$



纯旋转

$$H = K_2 R K_1^{-1}$$

平面投影变换



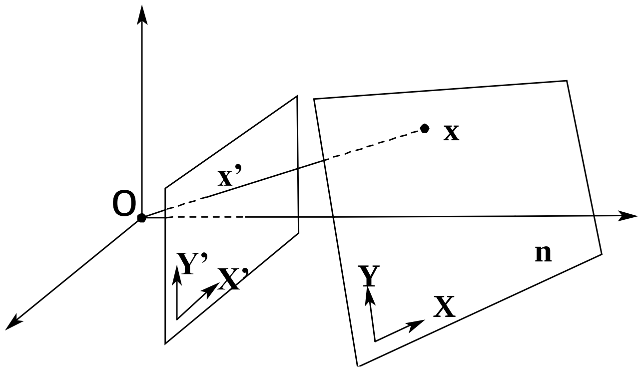
选择一个世界坐标系，使得平面上的点在该坐标系下Z坐标为0。我们可以推导其投影矩阵：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{14} \\ p_{21} & p_{21} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

这样一个3x3的矩阵就可以描述这个三维平面到图像平面的射影变换.

平面投影变换

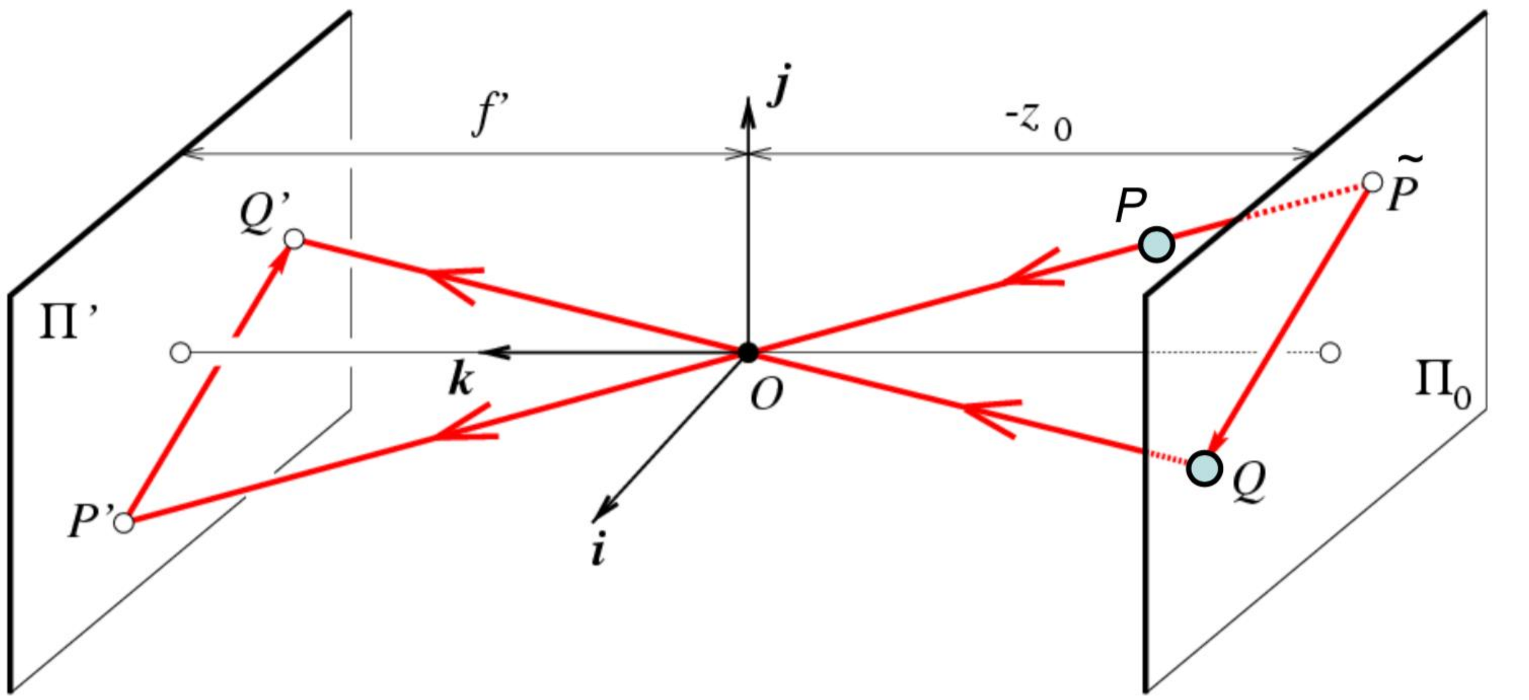
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



x = H**x**，H是一个3 ×3 的非奇异齐次矩阵。

- 这是使用透视相机时，最常用的一种从外部世界到图像平面的变换
- 他们之间的映射可以使用3x3的矩阵来表示
- 一个射影变换通常也被成为“单应性映射”或者“直射变换”
- H有八个自由度

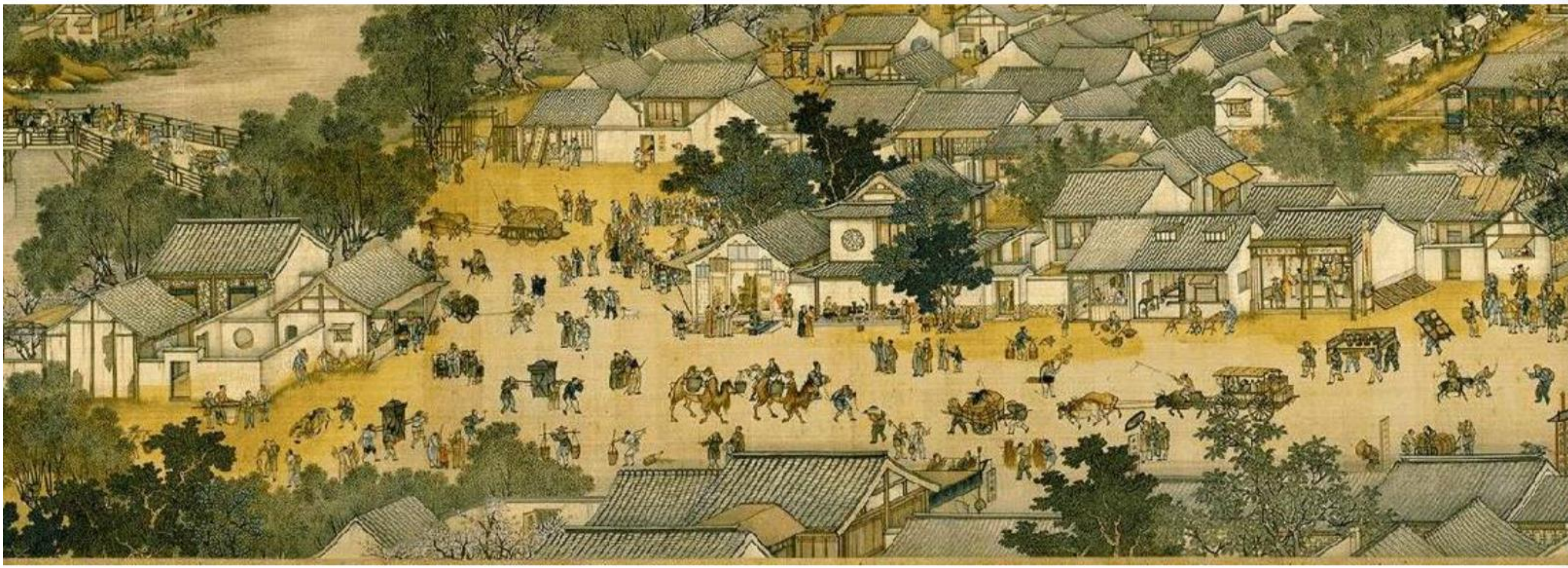
弱透视投影



$$(u,v) = (-f\frac{x}{z}, -f\frac{y}{z}) \rightarrow (u,v) = (-mx, -my)$$

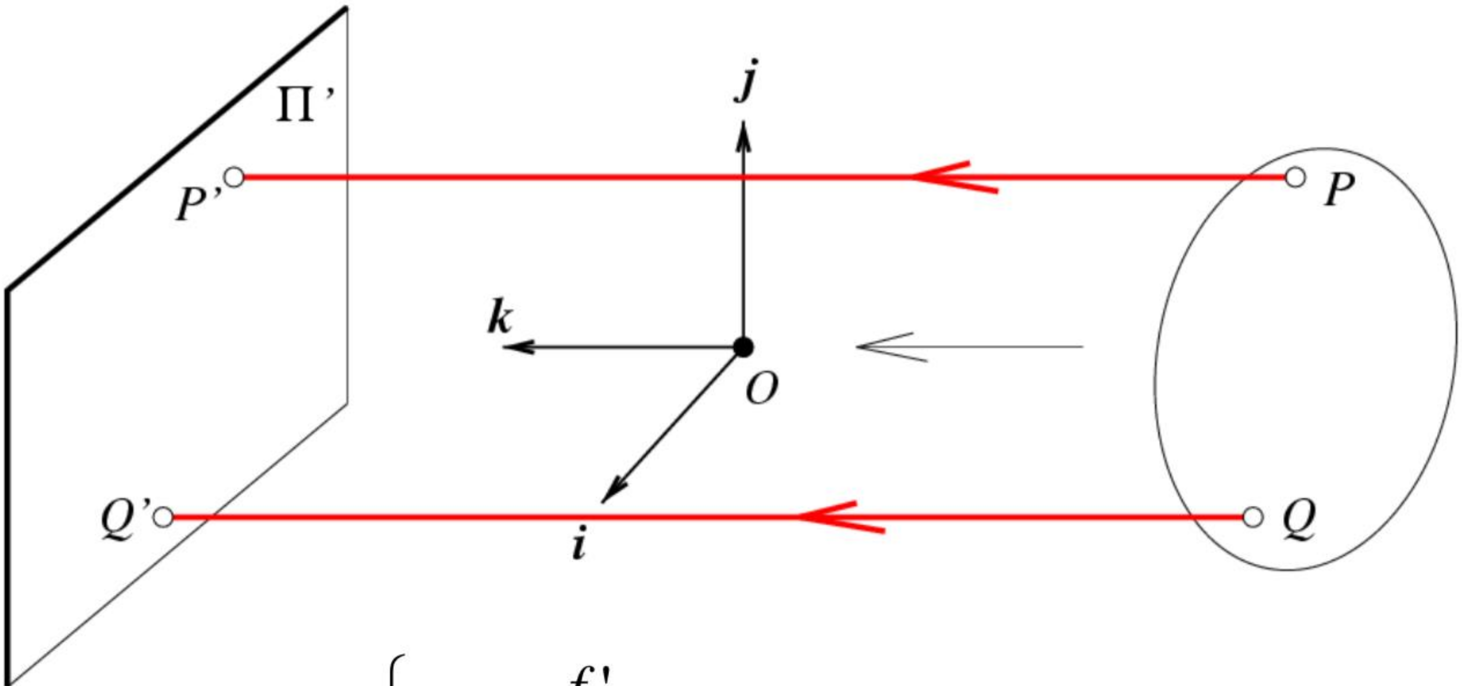
Richard Hartley and Andrew Zisserman.“Multiple View Geometry in Computer Vision”. Cambridge University Press, Second Edition 2004.

弱透视投影



清明上河图节选

正交投影



$$\begin{cases} x' = -\dfrac{f'}{z}x \\ y' = -\dfrac{f'}{z}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Richard Hartley and Andrew Zisserman.“Multiple View Geometry in Computer Vision”. Cambridge University Press, Second Edition 2004.

多视图几何

- 运动恢复结构
  - 从多张图像或者视频序列中自动恢复相机参数和三维结构

Noah Snavely, Steven M. Seitz, Richard Szeliski.
"Photo tourism: Exploring photo collections in 3D". 2016.

双视图几何

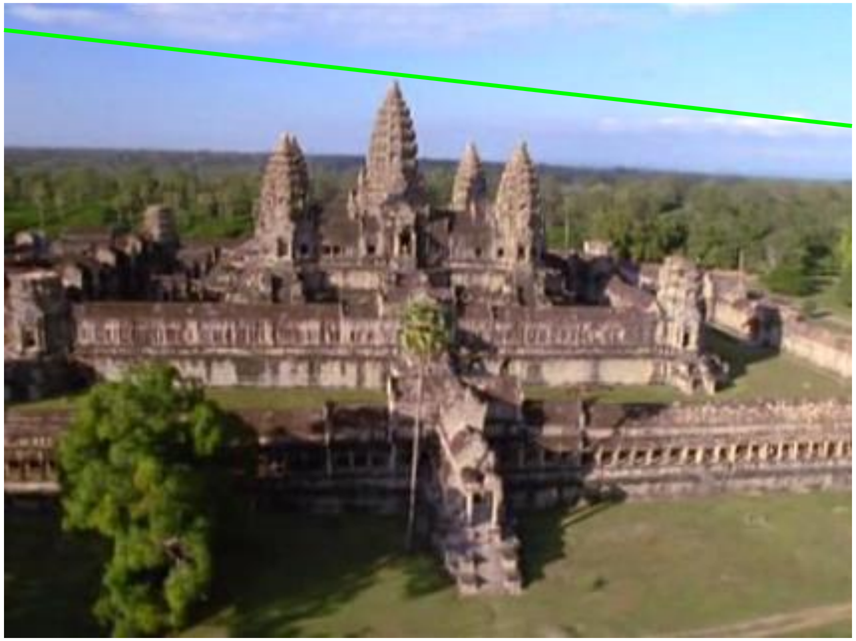
3D???

双视图几何

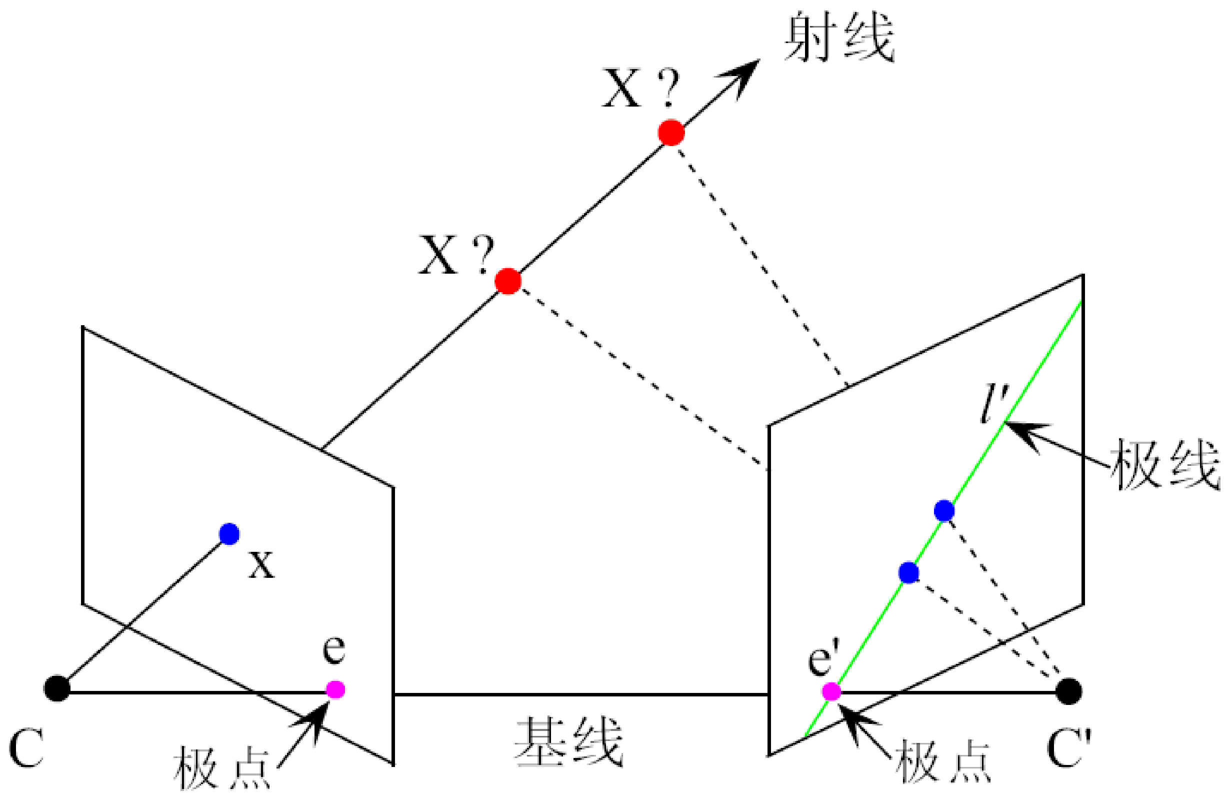
3D???

双视图几何

3D: 对极几何



对极几何



$$\hat{\mathbf{x}}'^{\top} F \hat{\mathbf{x}} = 0$$

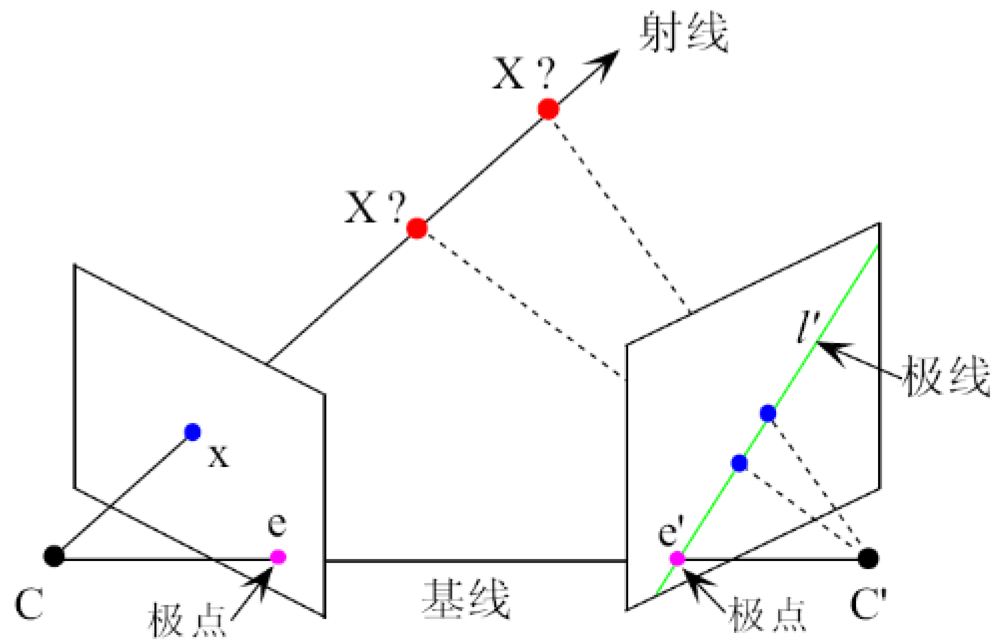
基础矩阵

- 只跟两个视图的相对相机姿态和内参有关

$$F = K_2^{-T}[t]_\times RK_1^{-1}$$

- F 是一个3 × 3 秩为2的矩阵
- **Fe = 0**
- 7个自由度
- 最少7对匹配点就可以求解
  - 七点法
  - 八点法

OpenCV: cvFindFundamentalMat()



八点法求解基础矩阵

根据对极几何关系，基本矩阵 F 满足

$$\hat{x}'^{\top} F \hat{x} = 0$$

若设 $\mathbf{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^{\top}$

那么对极几何关系又可以写作：

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_1\hat{x}_1 & \hat{x}'_1\hat{x}_2 & \hat{x}'_1 & \hat{x}'_2\hat{x}_1 & \hat{x}'_2\hat{x}_2 & \hat{x}'_2 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} = 0$$

若存在 n 对对应点，F 应满足如下的线性系统：

$$A\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \hat{x}'_{11}\hat{x}_{11} & \hat{x}'_{11}\hat{x}_{12} & \hat{x}'_{11} & \hat{x}'_{12}\hat{x}_{11} & \hat{x}'_{12}\hat{x}_{12} & \hat{x}'_{12} & \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{x}'_{n1}\hat{x}_{n1} & \hat{x}'_{n1}\hat{x}_{n2} & \hat{x}'_{n1} & \hat{x}'_{n2}\hat{x}_{n1} & \hat{x}'_{n2}\hat{x}_{n2} & \hat{x}'_{n2} & \hat{x}_{n1} & \hat{x}_{n2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} = 0$$

八点法求解基础矩阵

- f 为 9 维向量，若要有解，rank(A) 至多为 8
  - 在 rank(A) = 8 时，f 的方向是唯一的
  - 通过至少 8 对对应点，可恰好得到使 f 方向唯一的 A

- f 为 A 的右零空间的基向量，可用 svd(A) 求得

- 真实数据存在噪音，大于 8 组对应点得到的 A 满秩
  即 rank(A) = 9
  - 此时同样可计算 (U,Σ,V) = svd(A)
    令 f 为 V 中对应最小奇异值的列向量